UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

2020 G 26 A 01
4 heures
Série S2-S2A-S4-S5
Coef 5

Epreuve du 1^{er} groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (07 points).
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

Partie A

1. Soient z et z' deux nombres complexes. Compléter les propriétés sur les modules et arguments suivantes :
a. $|z^n| = ...$; **b.** Si z' non nul, alors $|\dfrac{z}{z'}| = ...$; **(0,25 + 0,25) pt**
c. $\arg(z^n) = ...$, n un entier naturel ; **d.** Si z' non nul, alors $\arg(\dfrac{z}{z'}) = ...$ **(0,25 + 0,25) pt**

2. Soient A, B, C et D des points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Donner l'interprétation géométrique de :
a. $|z_B - z_A|$; **b.** $\arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_C})$. **(0,25 + 0,25) pt**

3. Rappeler la formule de Moivre. **0,5 pt**

Partie B

Soit s une transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = a^3 z + a^2$, où $a \in \mathbb{C}$.

1. On donne $a = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s. **2 pts**

2. Déterminer les nombres complexes a pour lesquels :
a. s est une translation. **1 pt**
b. s est une rotation d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$. **1 pt**
c. s est une homothétie de rapport -8. **1 pt**

Exercice 2 (03 points).

1. On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance simultanément les deux dés et on s'intéresse à la somme S des chiffres apparus sur la face de dessus.
a. Déterminer les valeurs possibles de S. **0,5pt**
b. Déterminer la probabilité d'obtenir une somme égale à 9. **0,5pt**

2. Marame et Birane disposent chacun de deux dés et s'adonnent au jeu précédent, chacun de son côté.

a. Quelle est la probabilité que chacun affiche un même score de 9, 7 ou 8 ? **0,75pt**
b. Quelle est la probabilité qu'ils affichent le même score. **0,5pt**
c. Celui qui affiche le plus grand score gagne. Calculer la probabilité pour que Marame gagne. **0,75pt**

PROBLEME (10 points).

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x+1+\dfrac{3e^x}{e^x+2} & si \;\; x \leq 0 \\ \\ x+2+\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & si \;\; x > 0 \end{cases}$$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité graphique $1cm$.

1. Etablir que f est définie sur $\mathbb{R}$. **0,5 pt**

2. a. Etudier la continuité de f en 0. **0,75 pt**
b. Pour $x < 0$, montrer que $\dfrac{f(x)-2}{x-0} = 1 + \dfrac{2(e^x-1)}{x} \times \dfrac{1}{(e^x+2)}$. **0,5 pt**

En déduire $\lim\limits_{x \to 0,\, x<0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$. **0,25 pt**
c. Conclure sur la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats. **0,5 pt**

3. a. En utilisant les variations de la fonction h définie par $h(x) = \ln(x) - x$, montrer que $\ln(x) < x$ pour $x > 0$. **0,5pt**
En déduire que $\ln(x+1) < (x+1)^2$ pour $x > 0$. **0,5pt**
b. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et utiliser **3.a.** pour déterminer son signe. **(0,5 + 0,5) pt**
c. Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et donner son signe. **(0,5 + 0,25) pt**

4. a. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$. **0,5 pt**
b. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)]$ et interpréter graphiquement le résultat. **(0,25 + 0,25) pt**
c. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)]$ et interpréter graphiquement le résultat. **(0,25 + 0,25) pt**
d. Etudier le signe de $f(x) - (x+1)$ pour $x < 0$, montrer que $f(x) - (x+2) > 0$ pour $x > 0$ et interpréter graphiquement les résultats. **(0,25 + 0,25 + 0,25) pt**

5. Déterminer les coordonnées du point A de la courbe où la tangente est parallèle à l'asymptote pour $x > 0$. **0,25 pt**

6. Etablir que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser. **0,5 pt**

7. Représenter graphiquement les courbes de f et f^{-1} dans un même repère. **1 pt**

8. Calculer $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{0} \Big(f(x) - (x+1)\Big)dx$. **0,5 pt**

9. Interpréter le résultat précédent en terme d'aire. **0,25 pt**